Points et vecteurs dans un repère : Résumé de cours et méthodes

1 L'essentiel du cours

Si dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on a $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors :

• le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est tel que : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

• le **milieu** I de $[AB]$ est tel que : $I\begin{pmatrix} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{pmatrix}$.

• la **distance** AB est telle que $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. *(si le repère est orthonormé)*

Si dans une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on a $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ alors :

• pour tout réel k, $k\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$.

• le **déterminant** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est le réel noté $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ tel que :

$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

• les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0$.

• la **norme** du vecteur $\overrightarrow{u}$ (c'est à dire sa longueur) est le réel noté $\|\overrightarrow{u}\|$ tel que :
$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. *(si la base est orthonormée)*

2 Comment déterminer les coordonnées d'un point M défini par une relation vectorielle ?

Méthode générale :

• On pose $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

• On exprime la relation vectorielle avec les coordonnées.

• En utilisant que deux vecteurs sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes abscisses et les mêmes ordonnées, on en déduit les valeurs de x et y.

Exemple : On considère les points $A\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

Déterminons les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$.

On pose $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et, donc, $3\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \end{pmatrix}$

Comme $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 1 \end{pmatrix}$, on en déduit que $\begin{cases} x - 2 = 13 \\ y + 1 = 15 \end{cases}$.

On a donc $x = 5$ et $y = 14$. D'où, $M\begin{pmatrix} 5 \\ 14 \end{pmatrix}$.

3 Comment montrer que trois points A, B et C sont alignés connaissant leurs coordonnées ?

Méthode générale :

- On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
- On vérifie que le déterminant de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est nul.

(ce qui prouve leur colinéarité et l'alignement des points)

Exemple : Montrons que les points $A\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ sont alignés.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Donc, $\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = 6\times 6 - 9\times 4 = 36 - 36 = 0.$

Les points A, B et C sont bien alignés.